Aula 8 - Simetrias e leis de Conservação

Na mecânica elementar, sabemos que, sob certas circunstâncias bastante gerais, aparecem quantidades que são <u>conservadas</u> no decorrer do movimento ("constantes do movimento" ou "integrais primeiras")

Relembrando (v. seç 1.1)

- cons. de energia:

- se $\exists\ V(\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_n)$; $V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$; $V_{ij} = V_{ji}$ t.q.

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\nabla_i V^e \quad ; \quad \vec{F}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} \quad \text{(forças conservativas)}$$

então: • $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (satisfaz 3ª lei: fraca)

• $\underbrace{T_A + V_A}_{\text{energia total}} = T_B + V_B$; $V = V^{(e)} + \frac{1}{2}\sum_{ij} V_{ij}$

- conservação do mom. linear: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$, $\vec{P} = M\frac{d\vec{R}}{dt}$ $\quad$ M = massa tot. $\vec{R}$ = ctro de massa $= \sum_i m_i \vec{r}_i$

Em part. $= 0$ se $\vec{F}_{ext} = 0$

- conserv. de mom. angular

Para um sistema de partículas, o mom. angular c/ respeito a um pto Q satisfaz

$$\frac{d\vec{J}_Q}{dt} = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\times\vec{F}_{ij}}_{\substack{=0 \text{ se } \vec{F}_{ij} \text{ na} \\ \text{direção } \vec{r}_i - \vec{r}_j \\ \text{(forma forte da 3ª lei)}}} + \underbrace{\sum_i(\vec{r}_i - \vec{r}_Q)\times\vec{F}_i^{(e)}}_{\substack{\vec{N}_Q^e \\ \text{torque} \\ \text{externo}}} - \underbrace{M(\vec{R} - \vec{r}_Q)\times\dot{\vec{r}}_Q}_{\substack{=0 \text{ se } \vec{r}_Q = \vec{R} \\ \text{ou } \dot{\vec{r}}_Q = \text{cte}}}$$

$\therefore$ cond. <u>suficiente</u> p/ $\vec{J}_Q = $ cte : $\quad \vec{N}_Q^e = 0$, $\vec{r}_Q = \vec{R}$ e $\vec{F}_{ij}$ forças centrais

Novo ponto de vista: conectar leis de conservação a <u>simetrias</u> do Lagrangeano.

suposições para esta aula: sistema holônomo com Lagrangeano L

definições úteis: dado $L(q,\dot{q},t)$, o <u>momento</u> <u>canônico</u> <u>conjugado</u> à coordenada gen. q_i é

$$\boxed{p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$$

(obs: aqui p_i é uma função $p_i(q,\dot{q},t)$ de <u>todas</u> as coords, ñ apenas q_i)

ex: dada 1 partícula num pot $V(x,y,z)$: $L = T - V(x,y,z)$.

: os momentos conjugados às coords cartesianas são: $p_x = m\dot{x}$, etc.

ex: e para coords esféricas: $L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\varphi}^2\right] - V$

$$p_r = m\dot{r} \quad ; \quad p_\theta = m r^2 \dot{\theta} \quad ; \quad p_\varphi = m r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\varphi}$$

comp. radial de $m\dot{\vec{r}}$

comp. z do mom. <u>angular</u>! (<u>ñ</u> é a comp. φ de $m\dot{\vec{r}}$)

ex: p/ 1 partícula num campo EM descrito por $(\vec{A},\phi)$, os momento conjugados às coordenadas cartesianas <u>não</u> são $\vec{p} = m\vec{v}$:

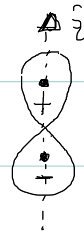
$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e\left[\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right] \longrightarrow \boxed{p_x = m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x}$$

Def: uma coordenada é <u>cíclica</u> se $\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0}$

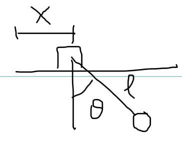
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{p_i = cte}$$

ex: se uma partícula está sujeita a um potencial central $V(r)$ então $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow p_\varphi = J_z = cte$! Mais ainda, como a escolha da direção $\hat{z}$ é totalmente arbitrária nesse caso, podemos concluir que <u>todas</u> as componentes J_x, J_y, J_z (portanto o vetor $\vec{J}$) se conservam

Em contraste, no caso de um potencial $V(r,\theta)$ apenas a componente J_z se conserva (ex: partícula sujeita ao campo de um dipolo elétrico ao longo do eixo $\hat{z}$)



ex. 25.5 conserv. de mom. p/ o pêndulo c/ pto de apoio móvel



$$L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{X}^2 + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + m \ell \dot{X} \dot{\theta} \cos\theta$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial X} \rightarrow p_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = M\dot{X} + m\Big[\underbrace{\dot{X} + \ell\cos\theta\,\dot{\theta}}_{= \frac{d}{dt}x}\Big] \qquad x = X + \ell \operatorname{sen}\theta$$

– Intuição: se L é independente de uma dada coordenada cíclica, então ele é <u>invariante por translações</u> nessa coordenada. Isso implica que o momento canônico conjugado é conservado! No caso duma coordenada ser angular, esse "deslocamento" corresponde a uma rotação

Obs: nem toda lei de conservação pode ser atribuída a coordenadas cíclicas, pois o fato de uma coordenada ser cíclica ou não depende do calibre usado no Lagrangeano (v. ex. da lista II)

Por razões técnicas, será útil considerarmos o que acontece com L sob deslocamentos <u>infinitesimais</u> nas coordenadas. Fica claro que, se L for invariante sob deslocamentos infinitesimais numa dada coordenada, também será invariante por deslocamentos finitos. Mais geralmente, podemos considerar deslocamentos infinitesimais envolvendo diversas coordenadas e/ou velocidades

Por exemplo, dado um sistema de n partículas em posições $\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_n$, com velocidades $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n$, podemos imaginar uma perturbação que as leve a ter novas posições e velocidades

$$\vec{r}_i{}' \equiv \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i \quad ; \quad \vec{v}_i{}' \equiv \vec{v}_i + \delta\vec{v}_i \quad ,$$

onde $\delta\vec{r}_i$ e $\delta\vec{v}_i$ são infinitesimais (e independentes)

O que ocorre com L após essa perturbação? Ele passa a valer

$$L'(\vec{r}_1'..\vec{r}_n', \vec{v}_1'..\vec{v}_n', t) = L(\vec{r}_1...\vec{r}_n, \vec{v}_1...\vec{v}_n, t) + \delta L$$

onde $$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\cdot\delta\vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\cdot\delta\vec{v}_i$$

notação para "gradiente c/ respeito a $v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i}$"

Dizemos que L é invariante sob essa transformação se $\delta L = 0$.

ex: <u>translações infinitesimais</u>

Sob uma <u>translação</u> do sistema como um todo, todas as partículas são deslocadas de um mesmo vetor constante, enquanto suas velocidades não se alteram:

$$\delta\vec{r}_i = \varepsilon\hat{n} \quad ; \quad \delta\vec{v}_i = 0 \quad , i = 1...n$$

Nesse caso: $$\delta L = \sum_i \varepsilon\hat{n}\cdot\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \varepsilon\hat{n}\cdot\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\right]$$

Para L ser invariante sob essa transformação <u>p/ qq ε</u>, é preciso que

$$0 = \hat{n}\cdot\left[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\right] = \hat{n}\cdot\sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \frac{d}{dt}\left[\hat{n}\cdot\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right] \Longleftrightarrow \boxed{\hat{n}\cdot\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = cte}$$

No caso de um sistema onde $L = T - V(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_n, t)$, $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = m\vec{v}_i$ é o momento linear da partícula i. Nesse caso então, podemos concluir que

L é invariante por translações na direção $\hat{n}$	$\Longleftrightarrow$	A componente nessa direção do momento linear <u>total</u> do sistema se conserva

obs: isto equivale à conservação do momento de uma partícula imaginária localizada no CM $R = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

ex: <u>Rotações infinitesimais</u>

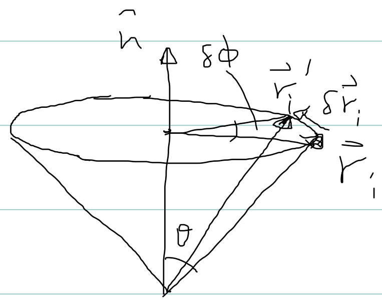
Sob uma <u>rotação</u> do sistema como um todo de um ângulo infinitesimal $\delta\phi$ ao redor de um eixo $\hat{n}$, as posições e velocidades se alteram para

$$\begin{cases} \vec{r}_i{}' = \vec{r}_i + \overbrace{\delta\phi(\hat{n}\times\vec{r}_i)}^{\delta\vec{r}_i} \\ \vec{v}_i{}' = \vec{v}_i + \underbrace{\delta\phi(\hat{n}\times\vec{r}_i)}_{\delta\vec{v}_i} \end{cases}$$

observe (fig) que

- $\delta\vec{r}_i \perp \hat{n}$
- $\delta\vec{r}_i \perp \vec{r}_i$
- $|\delta\vec{r}_i| = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\delta\phi = |\hat{n}||\vec{r}_i|\,\mathrm{sen}\,\theta\,\delta\phi$

$$\rightarrow \delta\vec{r}_i = (\hat{n}\times\vec{r}_i)\,\delta\phi$$



e o mesmo argumento vale p/ $\delta\vec{v}_i$

Nesse caso: usando a identidade $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$, vemos que

$$\delta L = (\delta\phi\,\hat{n})\cdot\left[\sum_i \vec{r}_i\times\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + \vec{v}_i\times\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right]$$

$$= (\delta\phi\,\hat{n})\cdot\left[\sum_i \vec{r}_i\times\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} + \frac{d\vec{r}_i}{dt}\times\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right] = (\delta\phi\,\hat{n})\cdot\sum_i \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i\times\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[(\delta\phi\,\hat{n})\cdot\sum_i \vec{r}_i\times\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right]$$

Assim, para termos $\delta L = 0$ p/ qq $\delta\phi$, precisamos que

$$\boxed{\hat{n}\cdot\sum_i \vec{r}_i\times\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = cte}$$

Novamente, no caso de $L = T - V(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_n, t)$, então $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = m\vec{v}_i$, e
$\vec{r}_i\times\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \vec{r}_i\times m\vec{v}_i = \vec{J}_i$ (momento angular da partícula i c/ respeito a um ponto no eixo de rotação)

Nesse caso podemos concluir então que

L é invariante por rotações ao redor do eixo $\hat{n}$ $\Longleftrightarrow$ A componente nessa direção do momento angular <u>total</u> do sistema se conserva